

Fernando Blasco Contreras Doctor en Ciencias Matemáticas y Profesor Titular de Matemática Aplicada. Universidad Politécnica de Madrid.

COORDINACIÓN

Emilio José Bande Fuentes e Isabel Tarancón Santana (Museo Nacional de Ciencia y Tecnología)

EDITA

Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología, FSP (FECYT)

ILUSTRACIÓN

CURRO OÑATE / WEARBEARD

MAQUETACIÓN E IMPRESIÓN:

Advantia, Comunicación Gráfica, S.A.

Depósito legal: M-19030-2021

NIPO: 831210149

e-NIPO: 831210154

Síguenos en:











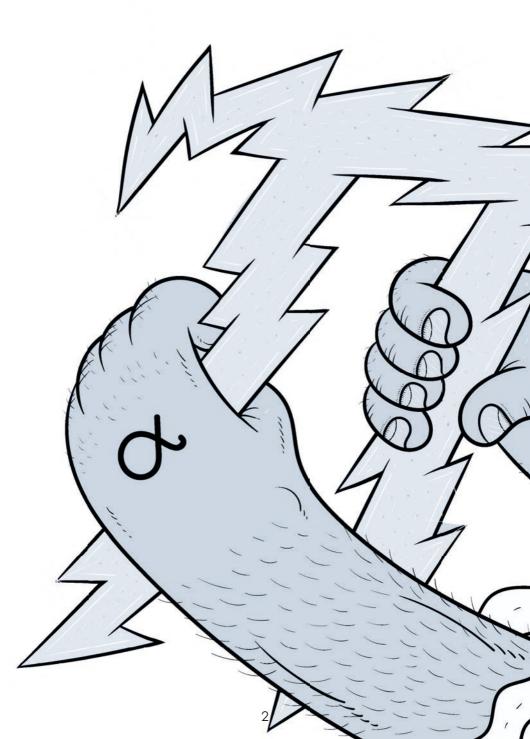
Matemáticas para conocer el mundo

- PREÁMBULO / INTRODUCCIÓN
- GEOMETRÍA: MEDIDA DE LA TIERRA
- NO SOLO MEDIDA, SINO FORMA
- MIDIENDO EL RADIO DE LA TIERRA
- UN JUEGO DEL S. III A. C. NADA MENOS QUE INVENTADO POR ARQUÍMEDES
- MEDIR PARA SITUARNOS

Preámbulo

El Museo Nacional de Ciencia y Tecnología (MUNCYT) elabora la colección "Cuadernos Experimenta" con el objetivo de abordar contenidos sobre ciencia y tecnología en un formato diferenciado y atractivo, desde una perspectiva didáctica y lúdica. La misión del MUNCYT es contribuir al conocimiento y la cultura científica contando con la colaboración de investigadores, profesores y divulgadores. Esta publicación se dirige, por lo tanto, a todos los públicos y contiene retos para resolver en el aula, durante la visita al Museo o para descifrar tranquilamente, por ejemplo en el autobús.

Esta colección está formada hasta el momento por siete publicaciones, cuya versión electrónica se encuentra en www.muncyt.es para su descarga gratuita: "Biotecnología. Calidad de vida", "Luz", "Pasatiempos científicos", "Relatividad", "Nanotecnología", "El ingenio romano" y "Los rayos cósmicos".



Introducción

Las matemáticas son el lenguaje en el que se escribe el universo: las matemáticas nos ayudan a interpretar el mundo. Sirven a la física para poder expresar medidas y formas, y también para poder establecer las ecuaciones que gobiernan las relaciones entre unos objetos y otros.

En este cuaderno os mostraremos cómo nos ayudan las matermáticas a medir.

La geometría es fundamental en matemáticas y muchos de los resultados que seguimos utilizando hoy fueron introducidos por los matemáticos griegos. El interés por medir distancias, tanto entre objetos situados en la tierra como objetos que vemos en el cielo, llevó a los matemáticos a idear conceptos y diseñar aparatos que permitieran realizar esas mediciones. La medida de distancias ayudó a contar con una mejor cartografía y a que los navegantes se pudieran orientar en alta mar. Hoy, las matemáticas también nos ayudan a situarnos con los sistemas de navegación por satélite que llevamos, incluso, en nuestros teléfonos móviles.

Esperamos que los textos y actividades de este Cuaderno te inviten a asomarte al maravilloso mundo de las matemáticas: todavía queda mucho que contar de lo que ya se ha hecho, pero lo más importante es que aún hay muchos fenómenos que explicar... y que descubrir.

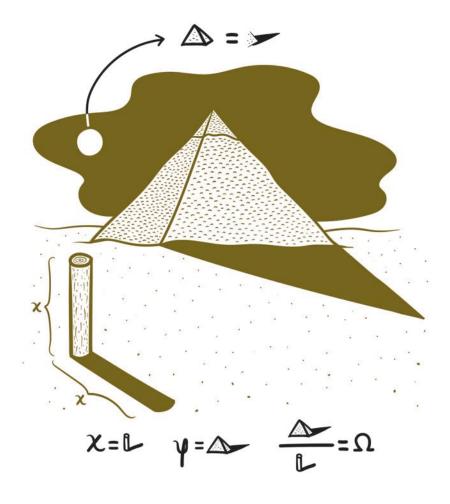




Geometría: medida de la Tierra

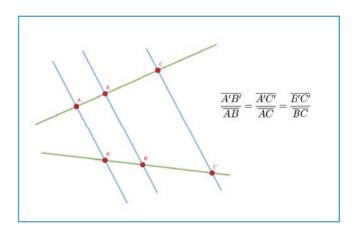
La geometría es la rama de las matemáticas que se ocupa de las propiedades del espacio. Este término proviene del griego gê, (Tierra) y metréo, (medir). Precisamente en eso consistía el trabajo de los primeros geómetras: en medir el tamaño de la Tierra. El legado de los geómetras griegos lo seguimos utilizando hoy. Cuando nos movemos por una ciudad utilizando un navegador, en realidad los modernos sistemas de GPS están utilizando técnicas de los matemáticos griegos, debidamente corregidas, para determinar nuestra posición.

Desde siempre los geómetras se han preocupado por medir el mundo. Tales, filósofo del s. VI a. C., es considerado como uno de los siete sabios de Grecia y como quien abandonó el uso de la mitología para explicar el universo, sustituyendo esa explicación mitológica por la observación de los fenómenos naturales y el establecimiento de hipótesis y experimentación para encontrar sus causas. En ese sentido se le puede considerar padre de la ciencia.



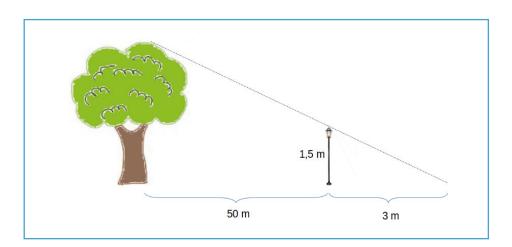
Una de las anécdotas que se cuentan sobre Tales es que fue capaz de medir la altura de las pirámides en Egipto. Para ello utilizó un razonamiento muy sencillo: se ayudó de un bastón de altura conocida, se situó próximo a la pirámide de Keops y esperó a que su bastón tuviera proyectada una sombra de igual longitud que la altura de este. Razonó que, en ese mismo momento, la altura de la pirámide también coincidiría con la longitud de la sombra de esta.

Uno de los resultados matemáticos que se atribuye a Tales se basa en la misma idea que usó para medir las pirámides: "Si dos rectas cualesquiera se cortan por varias rectas paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra"



ACTIVIDAD 1

En un parque hay una morera cuya altura desconocemos, una farola, de 1,5 metros de altura, que dista 50 metros del árbol y, si nos agachamos en un punto tal que el vértice superior de la farola coincide con el final de la copa del árbol, nos alejamos 3 metros del pie de la farola. ¿Cuál es la altura de la morera? (Atención, el dibujo no está hecho a escala: es solo un croquis).



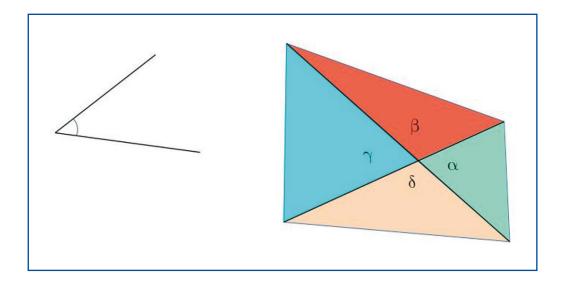
La semejanza de triángulos es la herramienta fundamental que tenemos para medir distancias inaccesibles: podemos medir objetos a los que no podemos llegar utilizando la lógica. Resulta sorprendente ver que con el pensamiento y la observación podamos calcular el radio de la Tierra o también distancias entre estrellas.



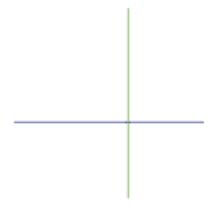
No solo medida, sino forma

Cuando tratamos con matemáticas es fundamental la observación. Pitágoras fue otro matemático del s. V a. C. No se sabe con certeza si fue discípulo de Tales pero puede que fuera así. Pitágoras se dio cuenta de bastantes cosas gracias a la observación de la Tierra y de los objetos geométricos.

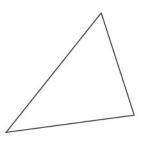
Si tomamos dos semirrectas con origen común, el espacio que queda entre ellas es un ángulo. Dos rectas que se cortan dividen al espacio en 4 regiones y determinan 4 ángulos, que son iguales dos a dos.



Los ángulos α y γ tienen el mismo tamaño, mientras que también lo son β y δ . Cuando al cortar una recta con otra el plano se divide en cuatro ángulos del mismo tamaño, a cada uno de esos ángulos se le denomina ángulo recto. Y de esas rectas se dice que son perpendiculares.

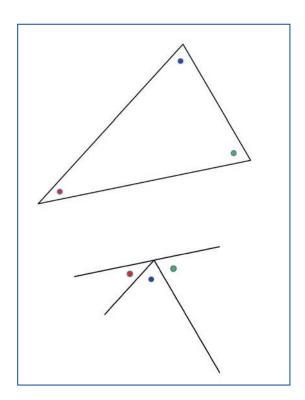


Aunque sepas qué es un triángulo, vamos a insistir en su definición: un triángulo es una figura que tiene tres lados y tres ángulos: lo que Pitágoras probó es que la suma de los ángulos de un triángulo equivale a dos ángulos rectos.



ACTIVIDAD 2

Dibuja un triángulo en una hoja de papel. Pártelo en tres trozos de forma que cada uno de ellos contenga un ángulo. Pon los tres ángulos juntos. Verás que, efectivamente, ocupan lo mismo que dos ángulos rectos.

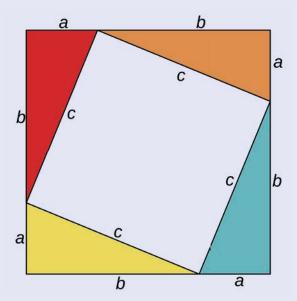


Además de darse cuenta de que la suma de los tres ángulos de un triángulo equivale a dos rectos, Pitágoras también pensó que la Tierra tenía forma esférica. El razonamiento era por analogía: él podía ver la Luna y dedujo que era esférica observando la forma del terminador: la línea que separa la zona de luz de la zona de sombra. Más adelante pensó que si la Luna era esférica probablemente también lo fuera la Tierra. Un siglo después, Aristóteles incidió en la esfericidad de la Tierra observando que un pequeño cambio en la posición norte o sur cambiaba mucho el horizonte y que durante los eclipses lunares la sombra que proyecta la Tierra sobre la Luna siempre era circular. Además, cuando viajamos nos damos cuenta de que no se ve el mismo cielo en todas partes: las estrellas y constelaciones que podemos ver desde el hemisferio norte son distintas que las que se ven desde el hemisferio sur. Si la Tierra fuera plana desde cualquier punto se verían las mismas estrellas.

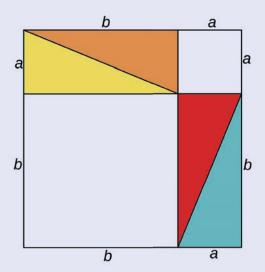
Pitágoras además es quien da nombre a un famoso teorema que relaciona las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo (un triángulo en el que uno de sus ángulos es un ángulo recto).

ACTIVIDAD 3

Recorta o dibuja cuatro triángulos rectángulos iguales. Llamaremos a y b a los lados del triángulo que forman el ángulo recto. Si los colocamos como en la figura formaremos exteriormente un cuadrado de lado a+b y en el interior nos queda un hueco cuadrado, de lado c.



Si ahora colocamos esos triángulos en una disposición diferente también podremos formar exteriormente un cuadrado de lado a+b, pero ahora en vez de tener un hueco cuadrado en el interior tenemos 2 huecos cuadrados: uno de lado a y otro de lado b



Como exteriormente la figura tiene el mismo tamaño y los triángulos no han cambiado se deduce que los huecos en ambos casos tenían que tener el mismo tamaño y, por tanto:

 $c^2 = a^2 + b^2$

Para saber más: puedes encontrar en este enlace: https://www.geogebra.org/t/pythagoras muchas actividades interactivas, desarrolladas con Geogebra, que están relacionadas con el Teorema de Pitágoras.

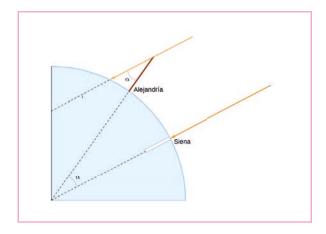




Midiendo el radio de la Tierra

Avanzando en el tiempo, se siguieron planteando problemas relacionados con la medida de la Tierra. Una de las más importantes contribuciones en este sentido fue la que hizo Eratóstenes en el s. Ill a. C. Lo que hizo fue medir el radio de la Tierra con una precisión bastante acertada.

Eratóstenes sabía que el día del solsticio de verano en Siena (ahora cerca de Asuán), los objetos no tenían sombra y los pozos se iluminaban completamente, aunque fueran muy profundos. Esto sucedía porque los rayos del sol incidían perpendicularmente sobre la superficie de la Tierra. Sin embargo, en la misma fecha, en la ciudad de Alejandría, mástiles, edificios y personas sí que proyectaban sombra.



Viendo la longitud de la sombra de un palo de longitud conocida, pudo calcular el ángulo α que formaban los rayos incidentes con el bastón clavado en el suelo. De este modo (y utilizando el concepto de un ángulo), pudo conocer que ese ángulo era α =7,2°. Con ese dato podía estimar el tamaño de la circunferencia de la Tierra: calculó la distancia que había entre Siena y Alejandría, que era aproximadamente de 800 kilómetros y, con ello, planteó un problema de proporcionalidad: si 7,2° se correspondían con 800 kilómetros, la totalidad de la circunferencia (360°) equivaldría a 40 000 kilómetros. Después de eso solo tuvo que calcular el radio de la circunferencia de acuerdo a la fórmula de la longitud de la circunferencia: L=2 π r , de donde r=L/ $(2\pi) \approx 40\,000/6,28 \approx 6369,43$ kilómetros. Las medidas actuales nos dicen que el radio de la Tierra es de 6378 kilómetros, con lo que Eratóstenes no andaba demasiado equivocado.

Para poder calcular la medida del radio de la Tierra, Eratóstenes tuvo que hacer dos suposiciones:

- La Tierra es una esfera perfecta
- El Sol se encuentra muy lejos de la Tierra, con lo que todos los rayos que llegan a nuestro planeta son paralelos

Sabemos que la Tierra no es una esfera perfecta, pero se aproxima mucho a esa forma geométrica. También sabemos que el Sol está lejos de la Tierra, pero a una distancia finita, con lo que no todos los rayos llegan paralelos, pero la diferencia de inclinación es muy pequeña.

En matemáticas, para poder avanzar, debemos abstraer los conceptos y, a grandes rasgos, identificarlos con objetos que sí podamos tratar. Suponer que la Tierra es una esfera no dista mucho de la realidad y, para algunas cosas, es suficiente considerarla esférica. Para cosas más avanzadas (por ejemplo, si usamos un sistema de navegación GPS y queremos localizar un punto) sí que necesitaremos mayor precisión. Y las matemáticas también se ocupan de ello.

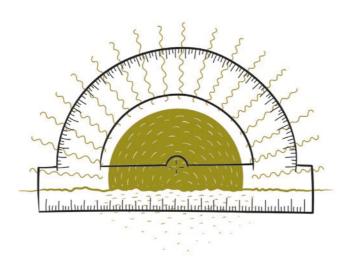
Para saber más: si quieres divertirte aprendiendo sobre Eratóstenes y cómo midió la tierra puedes ver este monólogo científico presentado a Famelab por Nuria Gordillo: https://www.youtube.com/watch?v=skfQst3ljE8

ACTIVIDAD 4

1.- Eratóstenes, además de medir el radio de la Tierra, también ideó un método para conseguir números primos. Un número natural es un número primo cuando el único divisor distinto de 1 que tiene es el propio número. Por ejemplo 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... son números primos. 4 no es primo porque es divisible entre 2. La criba de Eratóstenes es una tabla en la que a partir del 2 vamos tachando cada dos números: uno sí y 2 no. El 2 (el número por el que empezamos no lo tacharemos). Así, habremos tachado todos los números pares (salvo el 2). Después haremos lo mismo con el 3: a partir de él vamos contando 3 números y tachamos el que corresponda (iremos tachando 6, 9, 12, ...) así tendremos tachados todos los múltiplos de 3. Con el 4 no seguimos, que está tachado. Pero sí con el 5: a partir de él contamos 5 y tachamos, con lo que tacharemos 10, 15, 20, ... Y así sucesivamente. Al final, los números que queden sin tachar serán los números primos.

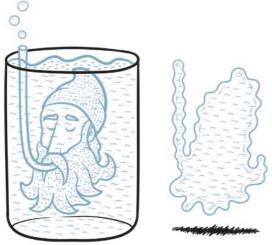
Te proponemos que consigas los números primos menores que 200 por este procedimiento

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105
106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135
136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165
166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195
196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225





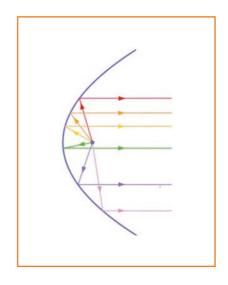
Un juego del s. III a. C. nada menos que inventado por Arquímedes



Arquímedes de Siracusa (287 a. C. - 212 a. C.) es considerado como uno de los mayores sabios de la Antigüedad. Trabajó en muchos campos científicos: es muy conocido por ser quien enunció el principio de hidrostática que afirma que todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje de abajo hacia arriba igual al peso del fluido desalojado. Sus contribuciones a la Física no se quedan ahí: es sabido que conocía el funcionamiento de los espejos parabólicos y se dice (aunque es una leyenda no del todo fiable), que con esos espejos quemó las velas de los barcos que iban a atacar su ciudad: Siracusa.

La parábola es una curva que tiene la propiedad de reflejar de forma paralela todos los rayos que parten de un punto especial llamado foco.

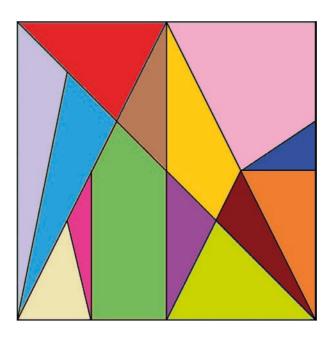
Esta propiedad de reflexión también ocurre en sentido inverso: si todos los rayos llegan paralelos al espejo, sus reflejados se concentran en el foco. Como el Sol está muy lejos de la Tierra, se puede asumir que los rayos de luz son paralelos cuando llegan a nuestro planeta. Con un espejo parabólico del tamaño y forma adecuados, Arquímedes podría concentrarlos cerca de las velas de los barcos atacantes y así quemarlas. Esa misma idea es la que funciona con los telescopios sonoros que puedes ver en el jardín de la sede de Alcobendas de MUNCYT. Si una persona habla en el foco de uno de los dos paraboloides, y otra escucha en el foco del otro paraboloide, ésta percibe perfectamente lo que dices jy eso que los paraboloides están separados a una distancia de 38 metros!



Arquímedes también nos ha dejado tecnología que se sigue utilizando hoy en día (24 siglos después) en algunas zonas. Un ejemplo de la faceta de Arquímedes como inventor es su conocido tornillo que permite, por ejemplo, subir agua desde un río a una zona elevada. En MUNCYT se conserva y expone en la sala Gabinete uno de estos objetos, fabricado en el s. XIX. Esta máquina es uno de los ingenios más utilizados desde su invención y también uno de los aparatos de demostración más habituales en los gabinetes de Física de todas las épocas

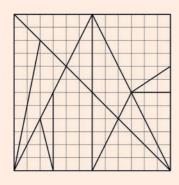
No se conservaron muchos escritos de Arquímedes, pero su obra se difundió a través de otros científicos. Principalmente se transmitieron los resultados, pero no cómo se había llegado a ellos porque, para mayor dificultad, en 1229 un monje borró las páginas de este libro para escribir un texto litúrgico. A finales del s. XIX los estudiosos se dieron cuenta de que bajo ese texto podría haber una obra de Arquímedes. Después de cambiar varias veces de manos durante un siglo, finalmente el libro llega al Walters Art Museum (Baltimore, EEUU), donde conservadores e investigadores comenzaron la aventura de rescatar los textos de Arquímedes jy lo consiguieron! Hay cosas que han aparecido en este libro que no se han encontrado en ningún otro lugar.

Una de ellas es un juego parecido, en cierto modo, al tangram: el Ostomachion. Consta de 14 piezas que, adecuadamente dispuestas, pueden formar un cuadrado:

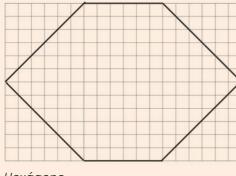


Te vamos a proponer varios retos relacionados con el Ostomachion:

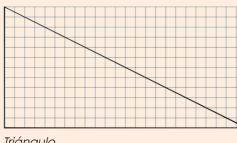
ACTIVIDAD 5

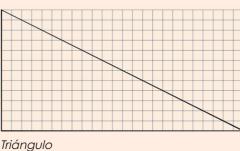


- 1.- ¿Puedes clasificar las piezas de acuerdo a su área? Pon juntas las piezas que tienen la misma área. La cuadrícula puede ayudar.
- 2.- Intenta volver a recomponer el cuadrado usando las 14 piezas. ¿Puedes hacerlo con una disposición diferente de la original? (hay 536 posibilidades y, considerando simetrías, traslaciones y cambiando de lugar figuras con la misma forma pero distinto color se convierten en 17152).
- 3.- Intenta hacer estas otras formas geométricas (la cuadrícula puede darte pistas).

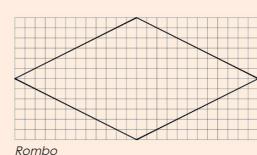


Hexágono





Trapecio



Para saber más: puedes explorar la propiedad de reflexión de la parábola con algunas construcciones en Geogebra: https://www.geogebra.org/m/hyg3wzrs

También puedes jugar con un Stomachion interactivo: https://www.geogebra.org/m/b9MV4G5h

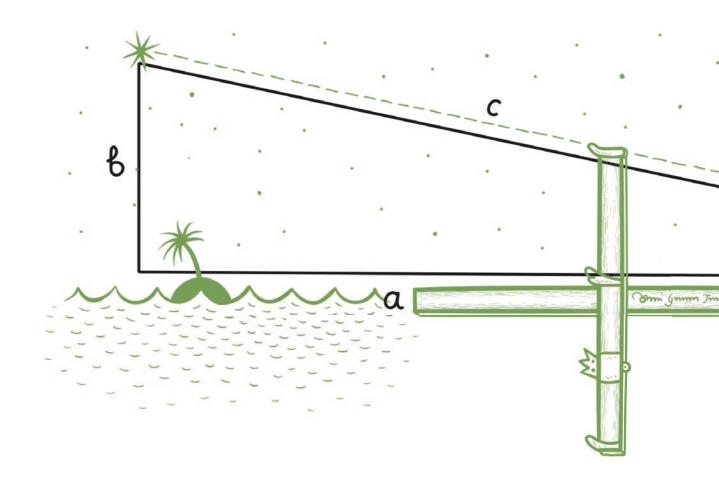


Medir para situarnos

Medir nos sirve para poder administrar, pero también sirve para situarnos. Por ejemplo, si subimos a una montaña, ser conscientes de la altura a la que estamos nos ayuda a saber cuánto nos queda por subir. Cuando vamos en un coche con poca gasolina nos interesa saber la distancia que tenemos hasta nuestro destino, sobre todo para comprobar si podremos recorrer ese número de kilómetros.

Ahora podemos conocer nuestra posición gracias a los navegadores por satélite (GPS, GLONASS o GALI-LEO) pero hasta hace no mucho teníamos que mirar en un mapa las rutas y conocer nuestra posición tomando como referencia algún edificio si estábamos en la ciudad, algún lugar característico si estábamos en la carretera o accidentes geográficos si íbamos por el campo.

Los navegantes, en medio del océano y rodeados de agua por todas partes, solo tenían una referencia: las estrellas. Las cartas de navegación ayudaban a conocer la posición en la que se encontraban los barcos usando como referencia lo único que podían ver. Uno de los instrumentos que utilizaban era la ballestilla, con la que calculaban los ángulos comprendidos entre las estrellas. También, conociendo el ángulo formado entre la estrella polar y el horizonte obtenían una aproximación de la latitud en la que se encontraban.



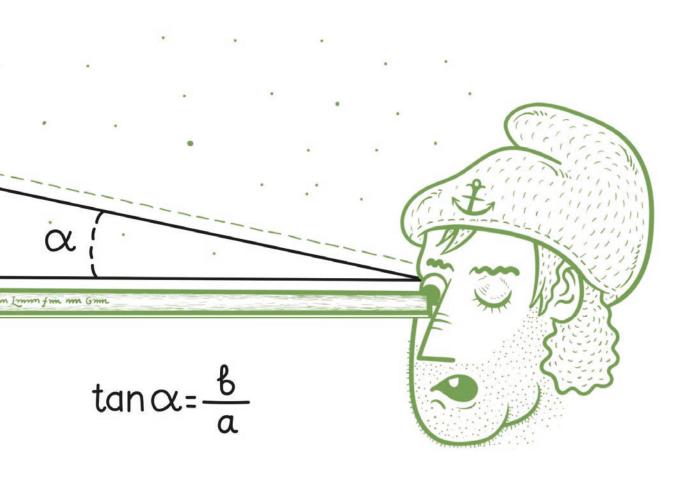
Aristarco (s. III a.C.) era un matemático griego que estaba más interesado en los métodos para calcular distancias entre objetos celestes que en la precisión de sus observaciones. Con sus ideas y una ballestilla pudo calcular la distancia de la Tierra al Sol: estimó que el Sol estaba 20 veces más lejos de la Tierra que la Luna. En realidad, está 400 veces más lejos, pero su cálculo se mantuvo durante 2000 años, hasta que se pudo medir con más precisión. Aristarco también planteó una teoría heliocéntrica, proponiendo que era el Sol quien estaba quieto y la Tierra la que orbitaba a su alrededor. En ese momento esta teoría se descartó porque no se observaban variaciones en la posición de las estrellas que tendrían que ocurrir si esa teoría fuera cierta. De nuevo, la teoría era cierta pero no se disponía de instrumentos precisos de observación.

En el MUNCYT se expone una ballestilla de Gualterius Arsenius (1563). Es la única completa que se conserva de este constructor.

La ballestilla consta de dos piezas esenciales: un listón largo llamado vara por los marinos y otro más estrecho, perpendicular a la vara y que se desliza por ella: el transversario. La vara contiene marcas que permiten conocer el ángulo existente entre el objeto que se quiere calcular y el horizonte o el ángulo entre dos objetos celestes.

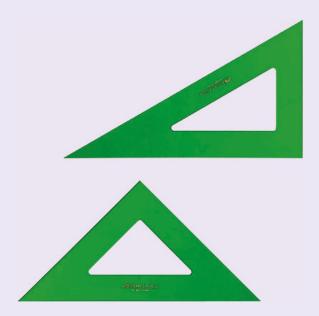
La ballestilla nos permite conocer la tangente del ángulo que estamos midiendo y, por tanto, determinar cuál es el ángulo.

Dado un ángulo α si construimos un triángulo rectángulo de modo que uno de sus ángulos sea α , la tangente de ese ángulo será la medida del cateto opuesto entre la del cateto contiguo. Esa cantidad no depende de lo grande que dibujemos el triángulo, sino únicamente de α , debido al teorema de Tales.



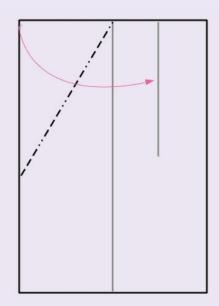
ACTIVIDAD 6

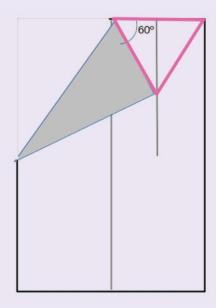
1.- Determina cuál es la tangente del ángulo de 45°, del de 60° y del de 90° (estos son los ángulos que aparecen habitualmente en las escuadras y los cartabones)



- 2.- Desde un cierto punto del suelo se ve el punto más alto de una torre formando un ángulo de 30° con la horizontal. Si nos acercamos 75 metros hacia el pie de la torre, vemos un ángulo de 60°. ¿Cuánto mide la torre?
- 3.- Partiendo de una hoja de papel, ¿serías capaz de plegarla para conseguir una escuadra? (Un triángulo rectángulo isósceles; lo único que tienes que hacer es conseguir un cuadrado a partir de la hoja de papel y después doblar por su diagonal).

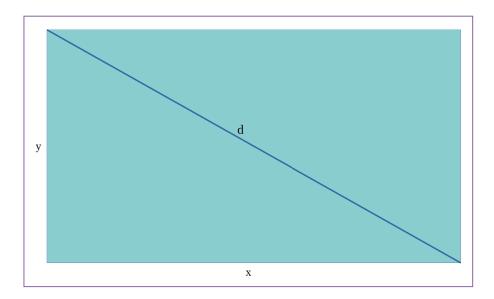
¿Serías capaz de plegar un cartabón? (Un triángulo rectángulo con ángulos de 30° y 60°)





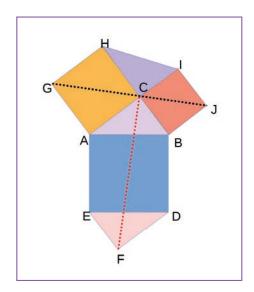
Plegando la hoja por la mitad y la mitad derecha otra vez por la mitad, si llevamos la esquina superior izquierda al pliegue último que hemos hecho, determinamos un ángulo de 60°, puesto que el triángulo marcado en rosa en la figura siguiente es equilátero. A partir de ahí, ya tienes el ángulo de 60° y fácilmente puedes conseguir el de 30°.

El teorema de Pitágoras lo utilizamos muy frecuentemente aunque no nos demos cuenta de ello. Por ejemplo, los tamaños de las televisiones se suelen expresar como el tamaño de la diagonal de su pantalla, medida en pulgadas. Ese número nos indica de forma unívoca los tamaños de los lados del televisor, si conocemos su formato. Ahora la mayoría de los televisores son de formato 16:9, que quiere decir que el ancho de la pantalla es 16/9 veces la altura de la misma. Así:



El teorema de Pitágoras nos dice que $x^2+y^2=d^2$ pero además, sabemos que x=16/9y, con lo que $(16/9y)^2+y^2=d^2$. Haciendo operaciones y aproximando las fracciones vemos que, aproximadamente, d=2,04 y. Esto nos dice que una televisión de 42 pulgadas tiene una altura de 20,59 pulgadas. Como 1 pulgada equivale a 2,54 centímetros, las dimensiones de una pantalla 16:9 de 42 pulgadas son 52,3 centímetros de alto y 92,97 centímetros de ancho.

Que aparezca este resultado por todas partes también ha llevado a buscar muchas demostraciones del mismo, muchas veces por simple diversión. Entre los personajes ilustres, y conocidos por otras razones, fascinados por el teorema de Pitágoras, encontramos a Leonardo da Vinci, a quien se atribuye una demostración basada en la siguiente construcción:



CF divide a los ángulos rectos ACB y EFD por la mitad. Del mismo modo, GJ divide a los ángulos rectos HGA y IJB por la mitad. Esa igualdad de ángulos, junto con las mismas longitudes de los lados, nos conduce fácilmente a que los cuadriláteros AGJB y FDBC son iguales. Como CF y GJ dividen en dos partes de la misma área a los hexágonos AEFDBC y ABJIHG, se tiene que las áreas de esos hexágonos son iguales y, por tanto que la suma de las áreas de los cuadrados con tonos anaranjados coincide con el área del cuadrado azul. ¡Eso es precisamente lo que indica el teorema de Pitágoras!

